

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии

УТВЕРЖДАЮ:

Врио заведующего кафедрой
математического анализа, алгебры
и геометрии

 Н.М. Махина
«26» марта 2025 г.

**ПРОГРАММА
КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА
ПО СПЕЦИАЛЬНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

научная специальность (отрасль науки)

**1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
(физико-математические науки)**

Программа кандидатского экзамена по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) / составитель: кандидат физико-математических наук, доцент Е.Г. Родикова. – Брянск: БГУ, 2025. – 11 с.

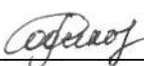
Программа составлена в соответствии с:

- Приказом Министерства образования и науки РФ от 28 марта 2014 г. № 247 «Об утверждении Порядка прикрепления лиц для сдачи кандидатских экзаменов, сдачи кандидатских экзаменов и их перечня» (с изменениями и дополнениями).

- Приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 24 февраля 2021 г. № 118 «Об утверждении номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, и внесении изменения в Положение о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденное приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 ноября 2017 г. № 1093» (с изменениями на 11 мая 2022 года).

Программа утверждена на заседании кафедры математического анализа, алгебры и геометрии от «28» марта 2025 г., протокол № 8.

Составитель


(подпись)

Е.Г. Родикова

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа предназначена для лиц, сдающих кандидатский экзамен по специальной дисциплине по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки).

Цель кандидатского экзамена – установить глубину профессиональных знаний аспиранта (прикреплённого лица), уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Настоящая программа определяет порядок проведения кандидатского экзамена по специальной дисциплине в соответствии с научной специальностью.

Задачи:

1. Установить уровень готовности аспиранта (прикреплённого лица) вести научные дискуссии, делать обобщения и формулировать научные выводы.

2. Выявить способности аспиранта (прикреплённого лица) к самостоятельному обучению новым методам, к самостоятельной профессиональной подготовке.

3. Выявить способности аспиранта (прикрепленного лица) проводить самостоятельные научные исследования.

Аспирант (прикреплённое лицо) должен(но):

знать:

– основные положения, результаты, методы вещественного, комплексного и функционального анализа;

– основные направления и проблемы современного вещественного, комплексного и функционального анализа.

уметь:

– решать стандартные задачи, доказывать теоремы вещественного, комплексного и функционального анализа;

– применять методы генерирования новых идей при решении научно-исследовательских задач.

владеть:

– навыками использования методов математических рассуждений для решения задач современного вещественного, комплексного и функционального анализа;

– навыками использования методов доказательств, необходимых для решения научно-исследовательских задач в области современного комплексного анализа.

2 СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Раздел 1. Комплексный анализ

Тема 1. Основные сведения из теории аналитических функций

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Морера). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенство Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. Аналитическое продолжение.

Тема 2. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Тема 3. Основные сведения о гармонических функциях

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Понятие субгармонической функции, примеры. Теорема о среднем и принцип максимума. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. Теоремы единственности для функций ограниченного вида. Теоремы И.И. Привалова и М. Рисса о сопряженных гармонических функциях.

Тема 4. Основные пространства аналитических в круге функций и их свойства

Классы Харди и Неванлинны в круге, связь между ними. Характеризация корневых множеств классов Харди и Неванлинны, условие Бляшке. Характеристика P . Неванлинны, ее свойства. Факторизационное представление классов функций ограниченного вида. Теорема Карлесона об интерполяции в классе ограниченных аналитических функций. Теорема Шапиро-Шилдса об интерполяции в классах Харди.

Тема 5. Весовые L_p -классы мероморфных в круге функций

Формулы типа Пуассона-Иенсена в весовых классах мероморфных функций. Классы Неванлинны-Джрбашяна S_α и их интегральное представление, сравнение с классами мероморфных функций N_α с ограниченной α -характеристикой.

Произведения π_α и их свойства. Факторизация классов N_α , обобщенных классов Неванлинны-Джрбашяна.

Раздел 2. Вещественный анализ

Тема 1. Меры, измеримые функции, интеграл.

Мера, измеримые множества. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Тема 2. Функции ограниченной вариации. Интеграл Стильеса

Функции с ограниченным изменением (вариацией). Интеграл Стильеса. Абсолютно непрерывные функции. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной.

Тема 3. Пространства суммируемых функций

Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортогональные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам.

Тема 4. Тригонометрические ряды Фурье

Тригонометрические ряды Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

Тема 5. Теорема Бернштейна и её применение

Многочлены Бернштейна и их основные свойства. Первая и вторая теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Приближение непрерывных функций на отрезке простыми дробями. Весовые полиномиальные приближения на оси и задачи С.Н. Бернштейна.

Раздел 3. Функциональный анализ

Тема 1. Метрические и топологические пространства

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

Тема 2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Нормированные пространства. Критерии компактности

множеств в пространствах $\mathbb{C}$ и L_p . Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

Тема 3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

Тема 4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

Тема 5. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций.

3 ВОПРОСЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

1. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Морера). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения.

2. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенство Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности.

3. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

4. Понятие целой функции. Теорема Лиувилля. Оценка Коши. Рост целой функции, порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение.

5. Целые функции конечного порядка, теорема Адамара. Принцип Фрагмена–Линделефа. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

6. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Теорема о среднем и принцип максимума. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. Ядро Пуассона, его основные свойства.

7. Понятие субгармонической функции, примеры. Теоремы единственности для функций ограниченного вида.

8. Классы Харди и Неванлинны в круге, связь между ними. Характеризация корневых множеств классов Харди и Неванлинны, условие Бляшке. Характеристика P . Неванлинны, ее свойства. Факторизационное представление классов функций ограниченного вида.

9. Теорема Карлесона об интерполяции в классе ограниченных аналитических функций. Теорема Шапиро-Шилдса об интерполяции в классах Харди.

10. Формулы типа Пуассона-Иенсена в весовых классах мероморфных функций. Произведения π_α и их свойства.

11. Классы Неванлинны-Джрбашяна S_α , свойства факторизационных сомножителей, сравнение с классами мероморфных функций N_α с ограниченной α -характеристикой.

12. Факторизация классов N_α с ограниченной α -характеристикой, обобщенных классов Неванлинны-Джрбашяна.

13. Мера, измеримые множества. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.

14. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

15. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Интеграл Стильеса.

16. Абсолютно непрерывные функции. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной.

17. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пространства L_p , их полнота.

18. Полные и замкнутые системы функций. Ортогональные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам.

19. Тригонометрические ряды Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд.

20. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

21. Многочлены Бернштейна и их основные свойства. Первая и вторая теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами.

22. Приближение непрерывных функций на отрезке простыми дробями. Весовые полиномиальные приближения на оси и задачи С.Н. Бернштейна.
23. Метрика, аксиомы. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность.
24. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.
25. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха.
26. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах $\mathbb{C}$ и L_p .
27. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.
28. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство.
29. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.
30. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.
31. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.
32. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций.
33. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций.

4 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К КАНДИДАТСКОМУ ЭКЗАМЕНУ

Основная литература

1. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М: Лань, 2009. – Т.1. Начала теории. – 496 с.
2. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М: Наука, 1968. – Т. 2. Дальнейшее построение теории. – 626 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=439146> – Текст: электронный.

3. Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Физматлит, 2009. – 286 с.

Дополнительная литература

1. Шамоян, Ф. А., Шубабко, Е. Н. Введение в теорию весовых классов мероморфных функций. – Брянск: «Десяточка», 2009. – 152 с.

2. Шамоян, Ф. А. Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. – Брянск: Издательство Брянского гос. ун-та, 2014. – 250 с. – ISBN 978-5-9734-0204-4.

3. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Лань, 2021. – 560 с.

4. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.

5. Маркушевич, А. И. Целые функции: элементарный очерк. – М.: ГИТТЛ, 1965.

Периодические издания

1. «Математические заметки»

2. «Математический сборник»

3. «Известия РАН». Серия «Математика»

4. «Сибирский математический журнал»

5. «Алгебра и анализ»

6. «Уфимский математический журнал»

7. «Записки научных семинаров ПОМИ РАН»

Интернет-ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». Полная коллекция: <https://urait.ru/>

2. ЭБС «Университетская библиотека онлайн». Базовая коллекция: www.biblioclub.ru/

3. ЭБС «Znaniy.com». Основная коллекция: <http://znaniy.com/>

4. ЭБД «East View» (ИВИС): <http://eivis.ru/>

5. <http://www.Math.Net.ru>

6. ГИС «Национальная электронная библиотека» (НЭБ): <https://нэб.рф/>

5 ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

Кандидатский экзамен проводится по билетам. Для подготовки ответа экзаменуемый использует экзаменационные листы.

На каждого экзаменуемого заполняется протокол приема кандидатского экзамена, в который вносятся вопросы билетов и вопросы, заданные членами комиссии.

Экзаменационные билеты должны включать два вопроса в соответствии с разделами программы кандидатского экзамена и один вопрос в соответствии с разделами дополнительной программы.

Уровень знаний оценивается на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка	Описание критериев оценки
«отлично»	– грамотно использована научная терминология; – четко сформулирована проблема, доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – указаны основные точки зрения, принятые в научной литературе по рассматриваемому вопросу; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы; – умение проводить междисциплинарные связи, связывая теоретические положения сообщения с профессиональной деятельностью.
«хорошо»	– применяется научная терминология, но при этом допущена ошибка или неточность в определениях, понятиях; – проблема сформулирована, в целом доказательно аргументированы выдвигаемые тезисы; – имеются недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности, которые не носят существенного характера; – высказано представление о возможных научно-исследовательских проблемах в данной области; – аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«удовлетворительно»	– названы и определены лишь некоторые основания, признаки, характеристики рассматриваемой проблемы; – допущены существенные терминологические неточности; – имеются существенные недостатки в аргументации, допущены фактические или терминологические неточности; – не высказано представление о возможных научно-исследовательских проблемах в данной области; – частично аргументирована собственная позиция или точка зрения, обозначены наиболее значимые в данной области научно-исследовательские проблемы.
«неудовлетворительно»	– отмечается отсутствие знания терминологии, научных оснований, признаков, характеристик рассматриваемой проблемы; – не представлена собственная точка зрения по данному вопросу.

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ПРОГРАММЫ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

1. Разработана:

Составитель _____
(подпись) /Родикова Е.Г./

«26» марта 2025 г.

2. Утверждена кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии

Протокол №8 от «26» марта 2025 г.

Врио заведующего кафедрой _____
(подпись) /Махина Н.М./

3. Согласовано

Руководитель ОПОП _____
(подпись) /Родикова Е.Г./

«26» марта 2025 г.

4. Согласовано

Врио заведующего кафедрой _____
(подпись) /Махина Н.М./

«26» марта 2025 г.